Rubrique : nombres
Extrait du volume II d'Algèbre & arith. pour l'agrég. int.[2]

Trois exercices sur la construction du corps des réels

Présentation des questions — Les Questions 1 et 2 sont destinées à être posées à l'oral en laissant le candidat libre de dire ce qu'il considère comme essentiel, en se limitant aux grandes lignes sans entrer dans les détails, donnant l'occasion au jury de savoir si certaines définitions classiques sont connues. La longue Question 3, qui permet de construire $\mathbb{R}$ grâce à un travail rigoureux, doit être perçue comme une préparation à l'écrit et une bonne façon de s'entraîner à utiliser des suites de Cauchy, des relations d'équivalences et des propriétés de $\mathbb{R}$. Les méthodes utilisées sont utiles et mettent certains savoirs en perspective. C'est une invitation à la recherche et à la rédaction juste.

Question 1
Dites-nous des axiomes qui définissent le corps $\mathbb{R}$ des réels.

Question 2
Donnez les grandes lignes d'une construction explicite de $\mathbb{R}$.

Question 3 ***Construction de $\mathbb{R}$ par les suites de Cauchy***
Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$. On dit que deux suites de Cauchy (r_n) et (s_n) de $\mathbb{Q}$ sont équivalentes, et l'on note $(r_n)\,\mathcal{R}\,(s_n)$, si :

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*\quad\exists N\in\mathbb{N}\quad n\geq N\ \Rightarrow\ |r_n-s_n|\leq\varepsilon.\quad (C)$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Par définition, $\mathbb{R}$ est égal à l'ensemble-quotient $\mathcal{C}/\mathcal{R}$, de sorte que $\mathbb{R}=\mathcal{C}/\mathcal{R}$. Dans la suite, on notera $(r_n)^c$ la classe de (r_n).

b) Montrer que l'on peut définir l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ en posant $(r_n)^c+(s_n)^c=(r_n+s_n)^c$ et $(r_n)^c\times(s_n)^c=(r_ns_n)^c$.

c) Si $x=(r_n)^c\neq(0)^c$, montrer qu'il existe $\alpha\in\mathbb{Q}_+^*$ et une suite de Cauchy (s_n) tels que $x=(s_n)^c$ et tels que l'on ait soit $s_n\geq\alpha$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $s_n\leq\alpha$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

d) Montrer que $(\mathbb{R}\ +,\times)$ est un corps commutatif.

e) Construire un monomorphisme de corps φ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ qui permet d'identifier $\mathbb{Q}$ à un sous-corps de $\mathbb{R}$.

f) On pose $\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}\,/\,\exists\,(r_n)\in\mathcal{C}\quad x=(r_n)^c$ et $r_n\geq 0$ pour tout $n\}$ et $\mathbb{R}_-=-\mathbb{R}_+$. Démontrer que $\mathbb{R}_+\cap\mathbb{R}_-=\{0\}$ et $\mathbb{R}_+\cup\mathbb{R}_-=\mathbb{R}$.

g) Définir une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$ qui étende celle de $\mathbb{Q}$ et soit compatible avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

RÉPONSES

Réponse 1 On peut dire ([3], §. 109) que $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné, archimédien, qui vérifie la propriété de la borne supérieure. On peut aussi dire que $\mathbb{R}$ est un corps commutatif archimédien et complet ([4], §. 1.3.1), en rappelant qu'un corps archimédien est toujours totalement ordonnée.

Pouvoir définir $\mathbb{R}$ par un système d'axiome sous-entend que ces axiomes assurent l'unicité de $\mathbb{R}$ à isomorphisme de corps et d'espaces ordonnés près. Les vérifications sont longues et fastidieuses, mais elles existent et on le plus simple est de les admettre (l'une d'elles se trouve en [4], §. 1.3.1).

On retiendra que les définitions axiomatiques de $\mathbb{R}$ reviennent en général à dire que $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné archimédien, et que l'une des cinq propriétés équivalentes suivantes liées à l'ordre est satisfaite :

> **(TSC)** *Théorème des suites croissantes majorées*
> Toute suite croissante majorée est convergente.
>
> **(TSA)** *Théorème des suites adjacentes*
> Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.
>
> **(COM)** *Complétude*
> $\mathbb{R}$ est complet.
>
> **(TSE)** *Théorème des segments emboîtés*
> L'intersection d'une suite décroissante de segments dont la longueur tend vers 0 est un singleton.
>
> **(TBS)** *Théorème de la borne supérieure*
> Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Il est bon de savoir que si l'une des propriétés listée ci-dessus est vraie, alors les quatre autres le sont. Ces propriétés essentielles interviennent dans de nombreuses démonstrations. Un exposé complet sur la construction de $\mathbb{R}$ est donné au chapitre 5 du livre *Construction des nombres* [1], avec la preuve de l'équivalences des 5 propriétés ci-dessus.

Réponse 2 Deux procédés classiques permettent de construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$, le premier utilise des coupures de Dedekind, et le second des suites de Cauchy de nombres rationnels.

Première méthode — Dans la méthode des coupures, on définit les sections commençantes ouvertes comme étant des parties s de $\mathbb{Q}$, différentes de $\varnothing$ et de $\mathbb{Q}$, telles que :

$$(x \in s \text{ et } y \leq x\ ) \Rightarrow\ y \in s,$$

et telles que s ne possède pas de plus grand élément. Grosso modo, les sections commençantes ouvertes sont de la forme $]-\infty, x[$ où $x \in \mathbb{R}$ (mais on ne peut pas le dire ainsi car c'est ce à quoi on aboutit après un long travail), et définissent des « nombres réels ». Le lecteur intéressé peut se référer aux exercices non corrigés 114 à 117 du Queysanne [3].

Seconde méthode — Un nombre réel est ici présenté comme une classe d'équivalence d'une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par :

$$(r_n)\,\mathcal{R}\,(s_n) \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad n \geq N \;\Rightarrow\; |r_n - s_n| \leq \varepsilon.$$

Cela paraît normal de s'intéresser aux limites des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ pour construire un sur-corps $\mathbb{R}$ qui soit complet. Les classes d'équivalence suivant $\mathcal{R}$ sont à comprendre comme des paquets de suites de Cauchy qui convergeraient vers la même limite, si elles convergeaient.

Au nombres rationnels, on essaie de rajouter toutes les limites des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ dans le sur-corps $\mathbb{R}$ que l'on veut construire, afin que celui-ci soit complet. Avec cette approche, une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ correspond à un nombre réel, et la nécessité du passage au quotient vient du fait que deux suites de Cauchy différentes peuvent représenter le même réel : celui vers lequel elles tendent. Cette construction est explicitée à la Question 3.

Réponse 3 a) La relation $\mathcal{R}$ est :

• Réflexive car $(r_n)\,\mathcal{R}\,(r_n)$, puisque $|r_n - r_n|$ pour tout n.

• Symétrique car si $(r_n)\,\mathcal{R}\,(s_n)$, et si ε est donné, alors $|r_n - s_n| \leq \varepsilon$ à partir d'un certain rang, mais aussi $|s_n - r_n| \leq \varepsilon$ à partir de ce même rang, donc $(s_n)\,\mathcal{R}\,(r_n)$.

• Transitive car si $(r_n)\,\mathcal{R}\,(s_n)$ et $(s_n)\,\mathcal{R}\,(t_n)$, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ il existe des entiers N et P tels que $n \geq N$ entraîne $|r_n - s_n| \leq \varepsilon$, et $n \geq P$ entraîne $|s_n - t_n| \leq \varepsilon$. En posant $Q = \text{Max}\,(N, P)$, on voit que $n \geq Q$ entraîne :

$$|r_n - t_n| \leq |r_n - s_n| + |s_n - t_n| \leq 2\varepsilon,$$

autrement dit :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \quad \exists Q \in \mathbb{N} \quad n \geq Q \Rightarrow |r_n - t_n| \leq 2\varepsilon \qquad (1)$$

ce qui prouve que $(r_n)\,\mathcal{R}\,(t_n)$.

Remarque — Le 2ε ne gêne pas. Pour s'en convaincre, il suffit de se donner un rationnel $\varepsilon' \in \mathbb{Q}_+^*$ quelconque, puis de poser $\varepsilon = \varepsilon'/2$ et d'appliquer (1)

pour obtenir un entier Q tel que $|r_n - t_n| \leq \varepsilon' = 2\varepsilon$ dès que $n \geq Q$. Dans la condition (C), on peut sans danger remplacer ε par un multiple de ε.

b) On peut définir une addition et une multiplication dans $\mathbb{R}$ en posant $(r_n)^c + (s_n)^c = (r_n + s_n)^c$ et $(r_n)^c \times (s_n)^c = (r_n s_n)^c$ si et seulement si les résultats de ces opérations ne dépendent pas du choix des représentants (r_n) et (s_n) des classes $(r_n)^c$ et $(s_n)^c$ que l'on veut composer. Cela demande une démonstration.

> *Parenthèse* — Imaginons deux personnes différentes qui prendraient les mêmes nombres réels x et y et appliqueraient la définition pour savoir qui sera $x + y$. La première écrit $x = (r_n)^c$ et $y = (s_n)^c$ pour certaines suites (r_n) et (s_n) de $\mathcal{C}$. La seconde choisit d'autres suites (r'_n) et (s'_n) de $\mathcal{C}$ qui vérifient aussi $x = (r'_n)^c$ et $y = (s'_n)^c$. Pour la première personne la somme $x + y$ est égale à $(r_n + s_n)^c$, tandis que pour la seconde, elle vaut $(r'_n + s'_n)^c$. Si par hasard $(r_n + s_n)^c \neq (r'_n + s'_n)^c$, alors la somme de x et y n'a pas le même sens pour ces deux personnes, ce qui signifie que la somme n'est pas bien définie, ou encore que notre définition est mauvaise et juste bonne à jeter aux orties !
>
> Conseil important : chaque fois qu'un jury d'oral demande de vérifier que la définition que l'on vient de proposer a un sens, n'oubliez pas de devenir SCHIZOPHRENIQUE et imaginer ce que feraient deux personnes différentes qui suivraient les instructions données à la lettre pour construire l'objet en question. Tout va bien si ces deux personnes obtiennent le même objet. Dans le cas contraire, la définition proposée n'a pas de sens !

- Pour l'addition, il s'agit de montrer l'implication :

$$\begin{cases} (r_n)\,\mathcal{R}\,(r'_n) \\ (s_n)\,\mathcal{R}\,(s'_n) \end{cases} \Rightarrow \quad (r_n + s_n)\,\mathcal{R}\left(r'_n + s'_n\right) \qquad (2)$$

Par hypothèse pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N et P tels que :

$$n \geq N \;\Rightarrow\; \left|r_n - r'_n\right| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad n \geq P \;\Rightarrow\; \left|s_n - s'_n\right| \leq \varepsilon, \qquad (3)$$

donc si $n \geq Q = \mathrm{Max}\,(N, P)$,

$$\left|(r_n + s_n) - (r'_n + s'_n)\right| \leq \left|r_n - r'_n\right| + \left|s_n - s'_n\right| \leq 2\varepsilon.$$

Cela montre que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \quad \exists Q \in \mathbb{N} \quad n \geq Q \;\Rightarrow\; \left|(r_n + s_n) - (r'_n + s'_n)\right| \leq 2\varepsilon$$

et donc que $(r_n + s_n)\,\mathcal{R}\,(r'_n + s'_n)$, ce qui prouve l'implication (2).

• Pour la multiplication, il faut vérifier la compatibilité de $\times$ avec la relation $\mathcal{R}$, c'est-à-dire que :

$$\left\{\begin{array}{l} (r_n)\,\mathcal{R}\,(r'_n) \\ (s_n)\,\mathcal{R}\,(s'_n) \end{array}\right. \Rightarrow \ (r_n s_n)\,\mathcal{R}\left(r'_n s'_n\right) \quad (4)$$

Si $\varepsilon > 0$ est donné, on sait qu'il existe deux entiers N et P qui vérifient les assertions (3), et si $n \geq Q = \mathrm{Max}\,(N, P)$, alors :

$$\left|r_n s_n - r'_n s'_n\right| = \left|r_n\left(s_n - s'_n\right) + s'_n(r_n - r'_n)\right| \leq A\varepsilon + B\varepsilon =\leq (A+B)\,\varepsilon$$

où A et B sont des majorants respectifs de $|r_n|$ et de $|s_n|$ quand n décrit $\mathbb{N}$, ce qui permet d'affirmer que $(r_n s_n)\,\mathcal{R}\,(r'_n s'_n)$ et achève la démonstration de (4). L'existence des majorants A et B ne pose pas de problème car on sait qu'une suite de Cauchy est toujours bornée. En effet, si (r_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad n, p \geq N \ \Rightarrow \ |r_n - r_p| \leq \varepsilon$$

et en particulier pour $\varepsilon = 1$, il existe N tel que :

$$n \geq N \ \Rightarrow \ |r_n - r_N| \leq 1 \ \Rightarrow \ ||r_n| - |r_N|| \leq 1 \ \Rightarrow \ |r_n| \leq 1 + |r_N|\,.$$

Ainsi $|r_n| \leq \mathrm{Max}\,(|r_0|\,, ..., |r_{N-1}|\,, 1 + |r_N|)$ quel que soit n, ce qui démontre que la suite (r_n) est bornée.

• Les deux vérifications précédentes sont nécessaires, mais il ne faut pas oublier de vérifier un dernier point tout aussi important : que la somme $(r_n + s_n)$ et le produit $(r_n s_n)$ de deux suites de Cauchy (r_n) et (s_n) sont encore des suites de Cauchy. Les preuves sont du même tonneau que celles que nous avons déjà données. Si (r_n) et (s_n) sont des suites de Cauchy, on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad n, p \geq N \ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |r_n - r_p| \leq \varepsilon \\ |s_n - s_p| \leq \varepsilon. \end{array}\right.$$

Si $n, p \geq N$, on obtient alors :

$$\left\{\begin{array}{l} |(r_n + s_n) - (r_p + s_p)| \leq |r_n - r_p| + |s_n - s_p| \leq 2\varepsilon \\ |r_n s_n - r_p s_p| = |r_n\,(s_n - s_p) + s_p(r_n - r_p)| \leq A\varepsilon + B\varepsilon \leq (A+B)\,\varepsilon \end{array}\right.$$

où $A = \mathrm{Max}\,(r_n)$ et $B = \mathrm{Max}\,(s_n)$, ce qui achève la vérification.

c) Dire que $(r_n)^c \neq (0)^c$ revient à dire que :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N \quad |r_n| \geq \varepsilon.$$

Comme (r_n) est une suite de Cauchy, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n,p \geq M \;\Rightarrow\; |r_n - r_p| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prenons $N = M$. Il existe alors $n \geq M$ tel que $|r_n| \geq \varepsilon$. En fait on aura soit $r_n \geq \varepsilon$, soit $r_n \leq -\varepsilon$. Supposons par exemple que $r_n \geq \varepsilon$ (l'autre cas se traitant de la même manière), alors :

$$p \geq M \;\Rightarrow\; |r_n - r_p| \leq \frac{\varepsilon}{2} \;\Rightarrow\; r_p \geq r_n - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il suffit de poser $\alpha = \varepsilon/2$ et de définir $(s_n)^c$ par :

$$s_n = \begin{cases} \varepsilon/2 & \text{si } n < M \\ r_n & \text{si } n \geq M \end{cases}$$

pour que $x = (s_n)^c$ et $s_n \geq \alpha$ quel que soit n.

d) Il est évident que l'addition définie sur $\mathbb{R}$ est commutative, associative, admet $(0)^c$ pour élément neutre (l'élément nul) et que tout élément $(r_n)^c$ de $\mathbb{R}$ admet un opposé : l'élément $(-r_n)^c$ qui satisfait bien $(r_n)^c + (-r_n)^c = \{0\}^c$. Ainsi $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif. On pose $0 = (0)^c$.

La multiplication est clairement commutative, associative et distributive sur l'addition. L'élément $(1)^c$ vérifie $(r_n)^c + (1)^c = (r_n)^c$ quel que soit $(r_n)^c \in \mathbb{R}$. C'est donc l'élément neutre pour la multiplication. Cela montre que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

Pour prouver que $\mathbb{R}$ est un corps, il reste seulement à démontrer que tout élément $x = (r_n)^c$ non nul de $\mathbb{R}$ possède un symétrique pour la multiplication (un inverse), c'est-à-dire un élément $(s_n)^c$ tel que :

$$(r_n)^c \times (s_n)^c = (1)^c.$$

La question c) nous permet de supposer que $(r_n)^c$ vérifie $|r_n| \geq \alpha$ pour tout n (puisque $x \neq (0)^c$ par hypothèse) et de définir $s_n = 1/r_n$ pour tout n. Alors :

$$(r_n)^c \times (s_n)^c = (r_n s_n)^c = (1)^c$$

comme on le désire, et il ne reste plus qu'à vérifier que (s_n) est bien une suite de Cauchy. On a :

$$|s_n - s_p| = \left| \frac{r_n - r_p}{r_n r_p} \right| \leq \frac{|r_n - r_p|}{\alpha^2}$$

et comme (r_n) est une suite de Cauchy :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad n,p \geq N \;\Rightarrow\; |r_n - r_p| \leq \varepsilon$$

donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad n,p \geq N \;\Rightarrow\; |s_n - s_p| \leq \frac{|r_n - r_p|}{\alpha^2} \leq \frac{\varepsilon}{\alpha^2}$$

où α^2 est une constante. Cela montre que (s_n) est une suite de Cauchy.

e) L'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{Q} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & r & \mapsto & (r)^c \end{array}$$

est bien définie (car une suite constante est toujours une suite de Cauchy) et injective. C'est aussi un homomorphisme de corps car pour tout $(r, s) \in \mathbb{Q}^2$:

$$\begin{cases} \varphi(r+s) = (r+s)^c = (r)^c + (s)^c = \varphi(r) + \varphi(s) \\ \varphi(r \times s) = (rs)^c = (r)^c \times (s)^c = \varphi(r) \times \varphi(s) \\ \varphi(1) = (1)^c = \text{ unité de } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Le monomorphisme $\varphi : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ induit un isomorphisme de $\mathbb{Q}$ sur le corps $\varphi(\mathbb{Q})$, et l'on peut par conséquent identifier les éléments de $\mathbb{Q}$ à ceux de $\varphi(\mathbb{Q})$ en posant $r = \varphi(r) = (r)^c$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels apparaît maintenant comme un sous-corps de $\mathbb{R}$.

f) La définition de $\mathbb{R}_+$ entraîne :

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists\, (r_n) \in \mathcal{C} \quad x = (r_n)^c \text{ et } r_n \leq 0 \text{ pour tout } n\}.$$

Les définitions de $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ montrent clairement que la multiplication dans $\mathbb{R}$ suit la loi des signes, autrement dit que $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_- = \mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_- = \mathbb{R}_+$. Il s'agit maintenant de montrer que :

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\} & (5) \\ \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}. & (6) \end{cases}$$

Preuve de (5) — Si $x \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_-$, alors x s'écrit $x = (r_n)^c = (s_n)^c$ avec $r_n \geq 0$ et $s_n \leq 0$ quel que soit n. Dans ce cas :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad n \geq N \;\Rightarrow\; |r_n - s_n| \leq \varepsilon \;\Rightarrow\; r_n \leq s_n + \varepsilon \leq \varepsilon$$

soit :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad n \geq N \;\Rightarrow\; |r_n - 0| \leq \varepsilon,$$

ce qui signifie que $x = (r_n)^c = (0)^c$.

Preuve de (6) — Si $x \in \mathbb{R}$ n'est pas nul, la question c) montre qu'il existe $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ et une suite de Cauchy (s_n) tels que $x = (s_n)^c$ et tels que l'on ait soit $s_n \geq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $s_n \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela montre que s_n est ou bien tout le temps strictement positif, ou bien tout le temps strictement négatif, et donc que x appartient à $\mathbb{R}_+$ ou à $\mathbb{R}_-$.

Remarque — Avec l'identification de $\mathbb{Q}$ à un sous-corps de $\mathbb{R}$ donnée en e), on a bien $\mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}_+$ par définition de $\mathbb{R}_+$, et en fait aussi $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{Q}_+$ autrement il existerait $x \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$ tel que $x \in \mathbb{Q}_-^*$ (en posant $\mathbb{Q}_-^* = \mathbb{Q}_- \backslash \{0\}$), ce qui entraînerait $x \in \mathbb{R}_-$, absurde puisque $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$.

g) On définit la relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad x \leq y \ \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+.$$

On obtient une relation d'ordre : la réflexivité est triviale, l'antisymétrie provient du fait que si $y-x \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_-$, alors $y-x = 0$ puisque $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$, et la transitivité exploite juste la propriété évidente suivant laquelle la somme de deux réels positifs est positive.

La relation $\leq$ est une relation d'ordre total car si $x, y \in \mathbb{R}$, alors $y - x$ est soit dans $\mathbb{R}_+$, soit dans $\mathbb{R}_-$ d'après (5) et (6).

Enfin, la relation $\leq$ est compatible avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie que :

$$\begin{array}{lll} (1) & \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 & x \leq y \ \Rightarrow \ x + z \leq y + z, \\ (2) & \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ & x \leq y \ \Rightarrow \ xz \leq yz. \end{array}$$

On le vérifie en retournant à la définition de $\leq$ dans $\mathbb{R}$. Par exemple la compatibilité avec l'addition se montre ainsi :

$$\begin{aligned} x \leq y \quad & \Leftrightarrow \quad y - x \in \mathbb{R}_+ \\ & \Leftrightarrow \quad (y+z) - (x+z) \in \mathbb{R}_+ \\ & \Leftrightarrow \quad x + z \leq y + z. \end{aligned}$$

References

[1] D.-J. Mercier, Dossiers mathématiques n°14, Construction des nombres, CSIPP, 2016.

[2] D.-J. Mercier, Agrégation interne de mathématiques, Algèbre & arithmétique II, IP, 2022.

[3] M. Queysanne, Algèbre, collection U, Armand Colin, 1971.

[4] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, Cours de Mathématiques Spéciales, Volume **1**, Algèbre, Masson, 1989.